ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

дисциплины 1.О.19 Исследование операций
для направления 09.03.04 Программная инженерия
уровень образования Бакалавриат
профиль подготовки Инженерия информационных и интеллектуальных систем
форма обучения очная
кафедра-разработчик Системное программирование

Разработчик программы, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры СП (ученая степень, ученое звание, должность)	_____ (подпись)	С.У. Турлакова
Зав. кафедрой Системное программирование доктор физ.-мат. наук, проф. (ученая степень, ученое звание)	_____ (подпись)	Л.Б. Соколинский

Челябинск

Данные методические указания являются руководством к решению различных задач линейного программирования и предназначены для практических занятий по курсу «Исследование операций». Целью методических указаний является выработка вычислительных навыков у студентов, более глубокое усвоение основных понятий и методов решения задач линейного программирования.

Методические указания предназначены для студентов направления 09.03.04 Программная инженерия профиль «Инженерия информационных и интеллектуальных систем».

1.ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Исследование операций – это научная дисциплина, занимающаяся разработкой и практическим применением математических количественных методов для обоснования решений во всех областях целенаправленной человеческой деятельности. Как научная дисциплина исследование операций зародилась в начале второй мировой войны и была обусловлена практической необходимостью наилучшей организации широкомасштабных военных действий, а также прогнозирования их исхода при принятии командованием различных решений.

Дальнейшее развитие исследования операций тесно связано с научно-технической революцией, когда происходило широкое развитие вычислительной техники и математических методов в сфере управления.

В настоящее время методы исследования операций находят широкое применение в решении самых разных практических задач, начиная от перспективного планирования научных разработок и кончая прогнозированием развития сферы обслуживания. Это связано с тем, что любую практическую задачу можно представить в виде той или иной задачи ИО.

Операция – это любое мероприятие или их система, которое направлено на достижение какой-либо цели или объединено общей идеей.

Примером может служить система мероприятий, направленная на повышение эффективности процессов технического обслуживания и ремонта автомобилей.

Здесь следует отметить, что операция – это всегда управляемое мероприятие, т.е. мы можем влиять на исход операции, изменяя параметры. Эти параметры, которые характеризуют мероприятие и которые мы можем менять, принято называть **решением**.

Допустимое решение – это любой элемент множества решений, которые удовлетворяют условиям, так называемым **ограничениям**.

Оптимальное решение – это решение, которое по тем или иным причинам предпочтительнее других.

Допустимое решение может быть оптимальным, а оптимальное всегда должно быть допустимым. Оптимальное решение выбирается из допустимых на основании **критерия оптимальности**.

Критерий оптимальности (целевая функция) – это признак, на основании которого производится сравнительная оценка допустимых решений и выбор среди них оптимального.

Исходя из выбранной целевой функции, принимается одно (или несколько) допустимых решений, которое и будет оптимальным. В качестве целевой функции может выбираться как характеристика исхода операции (например, минимальные затраты), так и вероятность события. Задача, в ко-

торой целевую функцию максимизи- руют, называется задачей максимизации, в которой минимизируют – задачей минимизации.

1.1. Математические модели исследования операций

Математическая модель – это описание (часто приближенное) какого-либо класса явлений реального мира, выраженное с помощью математических символов.

Всякая модель является упрощенным представлением действительности, и искусство моделирования состоит в знании того, что, где, когда и как упростить. Законченную типичную математическую модель исследования операций схематически можно представить следующим образом.

Максимизировать или минимизировать **целевую функцию**
при условии выполнения **ограничений.**

Например, минимизировать затраты времени на проведение диагностических операций на автомобилях (целевая функция) при известной пропускной способности контрольного пункта и при соблюдении нормативов проведения диагностики (ограничения).

В настоящее время математические модели получили всеобщее признание в ряде областей знаний. Однако существуют и возражения против них. В частности можно услышать, что некоторые изучаемые явления слишком сложны для адекватного отражения их математическими средствами. Здесь следует заметить, что продуктивной альтернативы использованию языка математических моделей и связанному с ними определенному упрощению и схематизации действительности нет.

Существует и еще одно возражение против математических моделей, в котором отрицаются не модели сами по себе, а целесообразность их исследования математическими средствами. Например, стоит ли теоретически изучать специальные модели теории массового обслуживания, когда путем имитационного моделирования на любой вопрос ответ может быть получен быстрее и с меньшими усилиями. Если целью является просто получение ответа в конкретном случае, то имитационное моделирование действительно лучший метод. Однако если целью является получение общего решения и изучение рассматриваемого явления, то простые и ясные заключения можно получить с помощью математических формул.

Таким образом, математические модели в исследовании операций необходимы, поскольку облегчают и упрощают анализ реальных жизненных ситуаций. Конечно жизнь богаче любой схемы, поэтому не следует преувеличивать значения количественных методов исследования операций. При прогнозировании событий с большим числом переменных величин, каждая из которых может повлиять на результат, иногда правильнее положиться на свою интуицию. Кроме того на сегодняшний день часть задач подобного ро-

да решается с использованием искус- ственного интеллекта. Большинство алгоритмов машинного обучения в том или ином виде включает математический аппарат, применяемый при решении задач исследования операций. Таким образом, математические модели исследования операций дают возможность изучить основы математического моделирования и пойти дальше по пути понимания принципов, лежащих в основе искусственного интеллекта.

1.2. Классификация задач исследования операций

Задачи исследования подразделяются по нескольким классификационным признакам.

I. По виду информационного состояния «лица, принимающего решения» (по виду исходных данных):

1) статические
2) динамические

Статической называется задача исследования операций, в котором принятие решений происходит в заранее известном и не меняющемся во времени информационном состоянии «лица, принимающего решения». В этом случае вся процедура принятия решений может быть реализована за один шаг.

Динамическая задача – это задача ИО, в которой информационное состояние «лица, принимающего решение» меняется во времени.

Например, составление перспективного плана развития сети автомобильных дорог. Параметры развития изменяются во времени, а сам процесс распадается на ряд этапов – шагов (например, шаг равен году). В этом случае целесообразно применить поэтапную (многошаговую) процедуру принятия решений.

II. По структуре информационного состояния «лица, принимающего решения» (по структуре исходных данных):

1) детерминированные
2) стохастические
3) неопределенные

Детерминированной называется задача ИО, в которой все параметры, влияющие на исход операции либо заранее известны, либо зависят от нас.

Этот простейший случай не часто встречается на практике.

Стохастическая задача – это задача ИО, в которой известны лишь вероятности пребывания объекта в каждом из состояний.

Неопределенная задача – это задача ИО, в которой не все условия, в которой проводится операция, известны заранее, а некоторые содержат элемент неопределенности.

Например, успех операции мо- жет зависеть от метеорологических условий. Такие задачи носят название задач принятия решений в условиях неопределенности.

III. По виду целевой функции

1) задачи линейного программирования, в которых целевая функция является линейной величиной;

2) задачи нелинейного программирования;

3) задачи выпуклого программирования;

4) задачи квадратичного программирования и др.

2. МЕТОДОЛОГИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

На практике реализация методов исследования операций должна включать в себя следующие этапы:

1. постановка задачи
2. построение математической модели
3. анализ модели
4. подготовка исходной информации
5. исследование модели
6. проверка адекватности модели
7. реализация решения.

Постановка (формализация) задачи – это начальный этап работы исследователя, который требует изучения той предметной области, где возникла проблема. В ходе изучения, как правило, выявляются так называемые «узкие места», устранение которых позволит повысить эффективность работы системы. На этапе формализации должны быть получены три принципиальных элемента задачи:

- описание возможных альтернативных решений,
- определение целевой функции,
- построение системы ограничений.

Построение математической модели означает описание ранее формализованной задачи на языке математики.

Исследование модели предполагает выполнение математических вычислений. Это наиболее простой из всех этапов реализации методов исследования операций, т.к. действия на этом этапе основываются на точной математической теории. Большое число вычислительных алгоритмов в настоящее время может быть реализовано с помощью компьютера.

Проверка адекватности модели предполагает проверку ее правильности. Суть такой проверки состоит в сопоставлении полученного теоретического решения с поведением реальной системы. Проверка адекватности, как правило, производится с помощью классических методов научных исследований.

Реализация решения подразу- мевает перевод результатов решения модели в рекомендации, представленные в форме, понятной для «лица, принимающего решения».

3.ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Широкий класс задач исследования операций может быть сформулирован в виде линейных задач оптимизации, характерной чертой которых является линейность целевых функций и ограничений. Основным методом решения линейных задач служит симплекс-метод.

В данном разделе приводятся основные понятия и определения, которые используются в последующих разделах.

3.1. Постановка и формы записи задачи ЛП

Общая задача линейного программирования (ЛП) формулируется следующим образом:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \to \max(\min) \qquad (1)$$

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \le b_i, & i = \overline{1, m_1} \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i, & i = \overline{m_1 + 1, m_2} \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \ge b_i, & i = \overline{m_2 + 1, m} \\ x_j \ge 0, & j \in J \subset \{1,2, \dots, n\} \end{cases} \qquad (2)$$

Вектор $x = (x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющий условиям задачи (2), называется допустимым решением (планом) задачи; множество всех допустимых решений задачи будем обозначать через X. Допустимое решение $x^* \in X$, доставляющее максимуму (минимуму)целевой функции (1) , называется оптимальным решением задачи; множество всех оптимальных решений обозначим через X^*.

Задача (1)-(2) разрешима, если $X \ne \varnothing$, $X^* \ne \varnothing$, в противном случае различают два типа неразрешимости: НР1- множество допустимых решений пусто , т.е. $X = \varnothing$; НР2 - целевая функция не ограничена на множестве допустимых решений, т.е. $X \ne \varnothing$, $X^* = \varnothing$.

Выделяют две формы задачи линейного программирования: стандартную и каноническую. Если ввести обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \text{K} & a_{1n} \\ \text{K} & \text{K} & \text{K} \\ a_{m1} & \text{K} & a_{mn} \end{pmatrix}$$ - матрица ограничений задачи размера m×n,

$b=\left(b_1\ ,\mathrm{K}\ ,b_m\right)$ - вектор свободных членов,

$c=\left(c_1\ ,\mathrm{K}\ ,c_n\right)$ - вектор коэффициентов целевой функции,

тогда эти формы задачи имеют вид:

стандартная форма
$$f(x)=\ (c\ ,\ x)\ \to\max\quad ,$$
$$Ax\ \le\ b\ ,$$
$$x\ge 0\ .$$

каноническая форма
$$f(x)=\ (\ c,\ \ x\ )\to\max\quad ,$$
$$Ax\ =\ b\ ,$$
$$x\ge 0\ .$$

3.2. Правила преобразования задач

Любую задачу линейного программирования можно свести к стандартной или канонической форме, используя следующие преобразования:

1) чтобы перейти от минимизации целевой функции к максимизации, достаточно умножить целевую функцию на «-1» и использовать очевидное равенство $\min f(x)=-\ \max(-f(x))$;

2) чтобы изменить тип ограничения-неравенства, нужно умножить его на «-1» :

$$a_{i1}\ x_1+\mathrm{K}\ +a_{in}\ x_n\ge b_i\quad\Rightarrow\quad -a_{i1}\ x_1-\mathrm{K}\ -a_{in}\ x_n\le -b_i\ ;$$

3) чтобы перейти от ограничений-неравенств к равенствам нужно ввести дополнительную (слабую) переменную x_{n+i} :

$$a_{i1}\ x_1+\mathrm{K}\ +a_{in}\ x_n\le b_i\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}a_{i1}\ x_1+\mathrm{K}\ +a_{in}\ x_n\ +x_{n+i}\ =\ b_i\ ,\\ x_{n+i}\ge 0\ ,\end{cases}$$

$$a_{i1}\ x_1+\mathrm{K}\ +a_{in}\ x_n\ge b_i\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}a_{i1}\ x_1+\mathrm{K}\ +a_{in}\ x_n\ -x_{n+i}\ =\ b_i\ ,\\ x_{n+i}\ge 0\ ,\end{cases}$$

4) чтобы перейти от ограничений-равенств к неравенствам нужно заменить это ограничение на два противоположных неравенства

$$a_{i1}\ x_1+\mathrm{K}\ +a_{in}\ x_n=b_i\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}a_{i1}\ x_1+\mathrm{K}\ +a_{in}\ x_n\ \le\ b_i\ ,\\ a_{i1}\ x_1+\mathrm{K}\ +a_{in}\ x_n\ \ge b_i\ ,\end{cases}$$

5) если переменная x_j свободная (нет ограничение на знак),то вводят новые переменные $x'_j \geq 0$, $x''_j \geq 0$ и делают замену $x_j = x'_j - x''_j$.

Пример 1. Привести к канонической форме следующую задачу:

Исходная задача

$$\begin{aligned} &2x_1+3x_2-x_3 \to \min \\ &x_1 - x_2+2x_3 \leq 3, \\ &x_1+x_2-x_3=4, \\ &2x_1+x_2+3x_3 \geq 2, \\ &x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} замена \\ x_3 = x'_3 - x'_3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

Каноническая форма

$$\begin{aligned} &-2x_1-3x_2+x'_3-x'_3 \to \max \\ &x_1 - x_2+2x'_3-2x'_3+x_4=3, \\ &x_1+x_2-x'_3+x'_3 \qquad =4, \\ &2x_1+x_2+3x'_3-3x'_3-x_5=2, \\ &x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x'_3 \geq 0, x'_3 \geq 0, \\ &x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0, \end{aligned}$$

Другой способ приведения состоит в том, что из второго уравнения находим $x_3 = -4 + x_1 + x_2$, а затем исключаем переменную x_3 из остальных ограничений и целевой функции:

(после исключения x_3)

$$\begin{aligned} &x_1+2x_2 \to \min \\ &3x_1+x_2 \leq 11, \\ &5x_1+4x_2 \geq 14, \\ &x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow$$

Каноническая форма

$$\begin{aligned} &-x_1-2x_2 \to \max \\ &3x_1+x_2+x_4 \qquad =11, \\ &5x_1+4x_2 \qquad -x_5=14, \\ &x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0, \end{aligned}$$

■

3.3. Задания

1.Построить разными способами каноническую и стандартную формы следующих задач:

а)
$$\begin{aligned} &2x_1+x_2-x_3+x_4 \to \max \\ &3x_1+x_2+x_3-2x_4=6, \\ &x_1-x_2+x_3+3x_4=4, \\ &-x_1+2x_2 \qquad +x_4 \leq 5, \\ &x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0, \end{aligned}$$

б)
$$\begin{aligned} &7x_1-2x_2+x_3+4x_4+x_5 \to \min, \\ &2x_1-x_2-2x_3+4x_4+x_5=5, \\ &x_1+2x_2-x_3+5x_4+2x_5=7, \\ &-x_1+3x_2-x_3 \qquad +x_5 \geq -3, \\ &x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

3.4. Геометрический метод решения задач линейного программирования

Пусть дана задача линейного программирования в виде:

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \quad \to \max \ ,$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \le b_1 \ , \\ \quad \Lambda \ \Lambda \ \Lambda \ \Lambda \ \Lambda \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 \le b_m \ , \\ \quad x_1 \ge 0 \ , x_2 \ge 0 \quad . \end{cases}$$

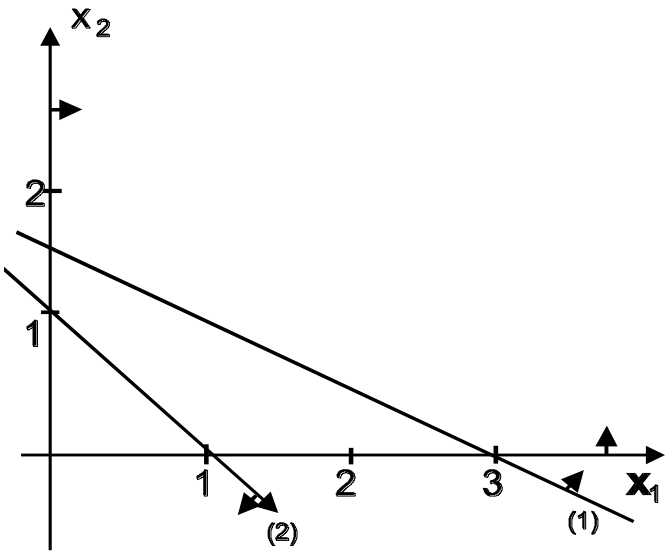
Каждое ограничение вида $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \le b_i \quad (i = \overline{1,m})$ или $x_j \ge 0 \ (j = 1,2)$ геометрически определяет полуплоскость, следовательно, множество допустимых решений X представляет собой пересечение конечного числа полуплоскостей, т.е. если $X \ne \varnothing$, то X есть либо многоугольник, либо многоугольное множество.

Пример 2. Построить на плоскости в системе координат множество X допустимых решений следующих систем линейных неравенств с двумя переменными.

а)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ \ge \ 3 \ , \\ x_1 + \ \ x_2 \ \le 1 \ , \\ x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

Рис.1. Множество X допустимых решений

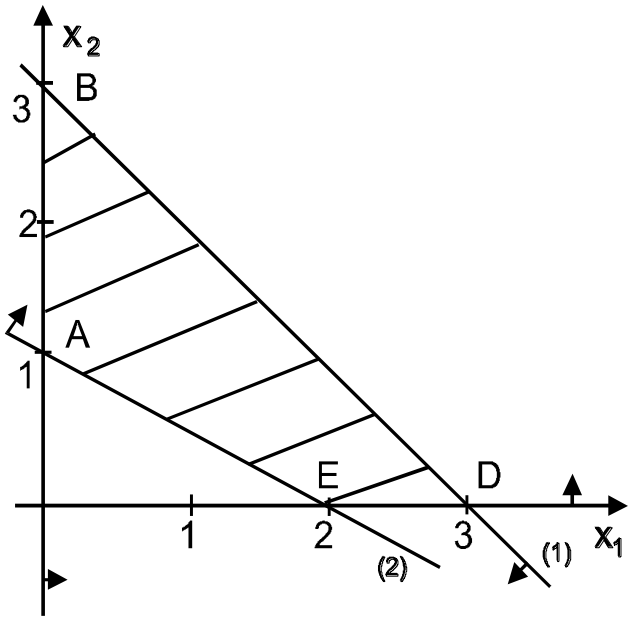


В ы в о д:
множество $X = \varnothing$.

б)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

Рис.2. Множество X допустимых решений

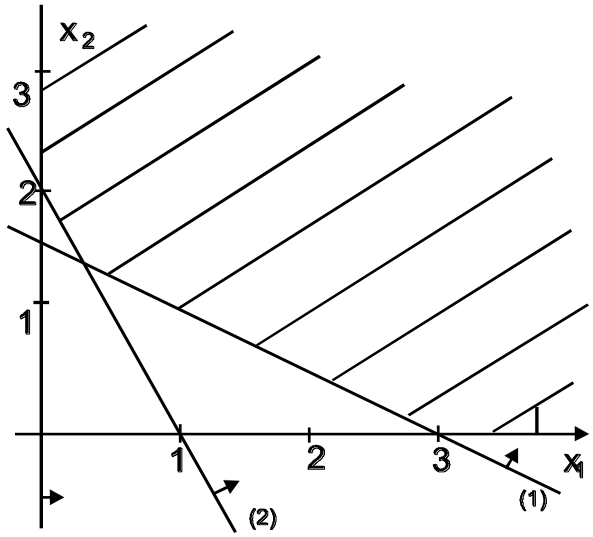


В ы в о д:
Множество X - многоугольник ABDE.

в)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 3, \\ 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

Рис.3. Множество X допустимых решений



В ы в о д:
Множество X - многоугольное множество.

■

Рассмотрим теперь целевую функцию $f(x)=c_1 x_1 + c_2 x_2$.Линии уровня $c_1 x_1 + c_2 x_2 = \alpha$ ($\alpha \in R$) образуют семейство параллельных прямых. При этом $f'(x) = c$, т.е. градиент целевой функции всюду одинаков и является вектором нормали $c=(c_1,c_2)$ к этим прямым, определяющим направление возрастания линейной функции $f(x)=c_1x_1+c_2x_2$. Поиск оптимального решения сводится к нахождению наибольшего числа α^* среди таких значений α ,что прямая $c_1 x_1 + c_2 x_2 = \alpha$ имеет общие точки с множеством X. С этой целью выберем допустимое решение $x^0 \in X$ и проходящую через нее линию уровня $c_1 x_1 + c_2 x_2 = \alpha^0$, где $\alpha^0 = f(x^0)$, и будем смещать ее в направлении вектора $c=(c_1,c_2)$ до предельного положения $c_1 x_1 + c_2 x_2 = \alpha^*$, при котором множество X окажется в одной из полуплоскостей, порожденных прямой $(c,x) = \alpha^*$, и хотя бы одна точка из X будет принадлежать этой прямой. Полученную предельную прямую назовем опорной для множества X. Точки из X, лежащие на опорной прямой, будут решениями задачи. При неограниченном множестве X опорной прямой может и не быть.

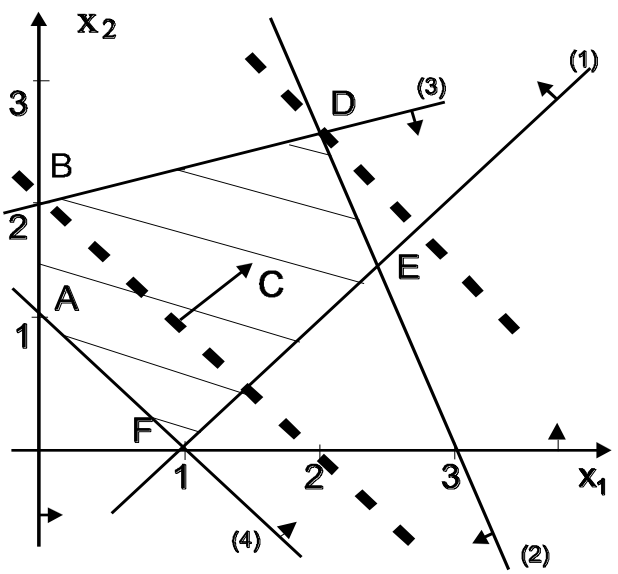
З а м е ч а н и е. Если требуется найти минимум целевой функции, то смещать начальную линию уровня $c_1 x_1 + c_2 x_2 = \alpha^0$ необходимо в направлении вектора $-c$.

Пример 3. Решить задачу линейного программирования.

$$f(x)=x_1+x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1, \\ 3x_1 + x_2 \le 9, \\ -x_1 + 4x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Рис.4. Множество X допустимых решений



Множество X допустимых решений представляет собой многоугольник ABDEF. Выбираем начальную точку, $x^0=(1\,,1) \in X$,

при этом $f(x^0)=2$. Для нахожде- ния максимума целевой функции строим начальную линию уровня $x_1 + x_2 = 2$ и перемещаем ее в направлении вектора $c=(1,1)$. Прямая, проходящая через точку D , будет опорной для множества X. Точка D является оптимальным решением задачи на максимум. Определим координаты точки D :

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 9, \\ -x_1 + 4x_2 = 8, \end{cases} \Rightarrow D=(\frac{28}{13},\frac{33}{13}) \Rightarrow x^*_{\max}=(\frac{28}{13},\frac{33}{13}) \Rightarrow f^*_{\max}=\frac{61}{13}.$$

Для нахождения минимума целевой функции необходимо перемещать начальную линию уровня $x_1 + x_2 = 2$ в направлении вектора $-c=(-1,-1)$. Предельным (опорным) положением будет прямая, проходящая через вершины A=(0,1) и F=(1,0). В этом случае множество оптимальных решений представляет собой отрезок [A,F] и имеет вид:

$$X^* = \{ x=\lambda A + (1-\lambda) F \mid \lambda \in [0,1] \}, \text{т.е.}$$

$$x^*(\lambda)=(1-\lambda, \lambda), \lambda \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad f^*_{\min} = 1 .$$

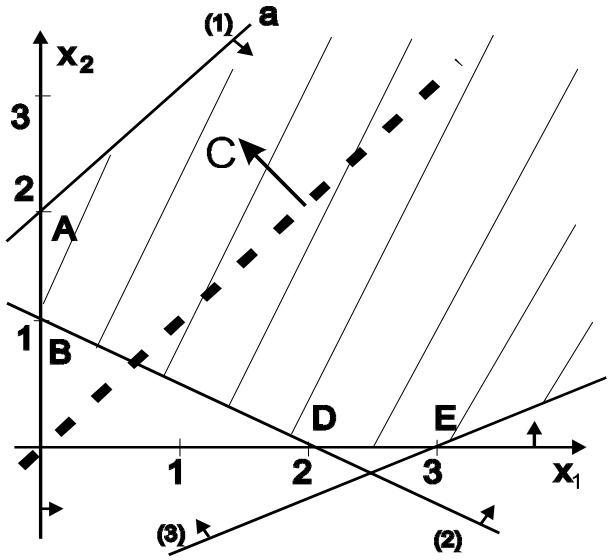
■

Пример 4. Решить задачу линейного программирования.

Рис. 5. Множество X допустимых решений

$$f(x) = -x_1 + x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \end{cases}$$



Множество X допустимых решений представляет собой многоугольное множество с вершинами A,B,D,E. Выбираем начальную точку

$x^0=(2,2) \in X, f(x^0)=0.$

Для нахождения максимума целевой функции строим начальную линию уровня $-x_1 + x_2 = 0$ и перемещаем ее в направлении вектора $c=(-1,1)$.

Предельным (опорным) положением будет прямая, проходящая через вершину A=(0,2) и ребро Aa. В этом случае множество оптимальных решений представляет собой луч Aa и имеет вид:

$$X^* = \left\{ x = A + \lambda \ l^1 \mid \lambda \geq 0,\ l^1 = (1,1) \right\},$$

т.е. $x^*(\lambda) = (\ \lambda\ ,\ 2 + \lambda\ )\ ,\ \lambda \geq 0 \quad \Rightarrow \ f^*_{\max} = 2$.

Для нахождения минимума целевой функции необходимо перемещать начальную линию уровня $-x_1 + x_2 = 0$ в направлении вектора $-c = (1,-1)$. Предельного (опорного) положения линии уровня не существует, т.е. задача на минимум неразрешима, т.к. целевая функция не ограничена снизу на множестве X. ■

Геометрическая интерпретация задач линейного программирования позволяет сделать следующие в ы в о д ы:

- множество X допустимых решений задачи может быть: пустым, выпуклым и ограниченным (многогранник), выпуклым и неограниченным (многогранное множество);
- целевая функция задачи либо не ограничена на множестве X , либо достигает своего экстремального значения хотя бы в одной вершине множества X .

Аналитический способ нахождения вершин множества X, рассмотрен в следующем разделе.

3.5. Задания

1.Найти минимальное и максимальное значения целевой функции следующих задач линейного программирования:

а)

$$f(x) = 2x_1 + x_2 \to \max\ (\min) \quad \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \end{cases}$$

б)

$$f(x) = 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max(\min) \quad \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3\ 3x_4 = 2, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0\ , x_4 \geq 0. \end{cases}$$

2. Построить задачи линейного программирования, для которых имеет место а) неразрешимость 1 рода; б) неразрешимость 2 рода.

3.6. Решение систем линейных уравнений.

3.6.1. Базисные и опорные решения

Пусть дана система линейных уравнений:

$$Ax = b \quad \text{или} \quad \sum_{j=1}^{n} A^j x_j = b \ , \qquad (3)$$

где $x \in R^n$, $b \in R^m$, $A = (a_{i,j})$ $-(m \times n)-$матрица, $A^j \in R^m$ – столбец матрицы . Будем считать, не нарушая общности, что $rang\ A = m$. Известно, что точка $\bar{x} \in R^n$ является вершиной многогранного множества $X = \left\{ x \in R^n \mid Ax = b,\ x \geq 0 \right\}$, тогда и только тогда, когда вектор $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ есть опорное решение системы линейных уравнений (3).

О п р е д е л е н и е 1. *Базисным решением* системы линейных уравнений (3) называется допустимое решение, ненулевым компонентам которого соответствуют линейно-независимые столбцы матрицы A.

О п р е д е л е н и е 2. Базисное неотрицательное решение системы линейных уравнений (3) называется *опорным*.

Из определения следует, что число ненулевых компонент базисного решения не больше m .

О п р е д е л е н и е 3. Базисное решение называется *вырожденным*, если число его ненулевых компонент меньше m, иначе оно называется *невырожденным.*

О п р е д е л е н и е 4. *Базисом* B опорного решения $\bar{x}$ называется произвольная система из m линейно независимых столбцов матрицы A, включающая в себя все столбцы, которые соответствуют положительным компонентам вектора $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$, т.е. $B = \left\{ A^{j_1}, \ldots, A^{j_m} \right\}$.

Переменные $\bar{x}_j$, соответствующие столбцам $A^j \in B$, называются *базисными*, остальные - *небазисными*.

Пример 5. Найти какое-нибудь опорное решение системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + \frac{3}{2}x_5 = 2, \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Перечислим все базисы, образованные столбцами A^1, A^2, A^3, A^4, A^5 матрицы ограничений:

$$B_1 = \left\{A^1, A^2\right\}, B_2 = \left\{A^1, A^3\right\}, B_3 = \left\{A^1, A^4\right\}, B_4 = \left\{A^1, A^5\right\},$$
$$B_5 = \left\{A^2, A^4\right\}, B_6 = \left\{A^2, A^5\right\}, B_7 = \left\{A^3, A^4\right\}, \quad .$$
$$B_8 = \left\{A^3, A^5\right\}, B_9 = \left\{A^4, A^5\right\}.$$

Для построения базисного решения выберем один из базисов, например B_1, и приравняем нулю небазисные переменные x_3, x_4, x_5. Найдем базисные переменные x_1, x_2, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 - x_2 = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -1. \end{cases}$$ Решение $x^1 = (1, -1, 0, 0, 0)$ является

базисным , но не опорным. Рассмотрим базис B_3 :

$$B_3 = \left\{A^1, A^4\right\} \Rightarrow x_2 = x_3 = x_5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_4 = 2, \end{cases} \Rightarrow x^3 = (0,0,0,2,0)$$ -

вырождено опорное решение, которому соответствует четыре базиса: B_3, B_5, B_7, B_9.

■

3.6.2. Жордановы таблицы

Если B базис опорного решения (пусть для определенности $B = \left\{A^1, \ldots, A^m\right\}$), то система уравнений (3) может быть представлена в виде

$$B\,x_B + D\,x_D = b \quad , \qquad (4)$$

где $x_B = (x_1, \ldots, x_m)$-вектор базисных переменных, $D = \left\{ A^{m+1}, \ldots, A^n \right\}$, $x_D = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$ - вектор небазисных переменных. С помощью элементарных преобразований систему (4) можно привести к виду:

$$x_B + Z\, x_D = Z^0, \tag{5}$$

где $Z = B^{-1} D$, $Z^0 = B^{-1} b$.

Такая форма записи системы называется жордановой . Запишем систему уравнений (5) в развернутом виде:

$$\begin{cases} x_1 + z_{1m+1}\, x_{m+1} + \ldots + z_{1n}\, x_n = z_{10}, \\ x_2 + z_{2m+1}\, x_{m+1} + \ldots + z_{2n}\, x_n = z_{20}, \\ \ldots \\ x_m + z_{mm+1}\, x_{m+1} + \ldots + z_{mn}\, x_n = z_{m0}, \end{cases} \tag{6}$$

Легко заметить, что столбцы $Z^j = B^{-1} A^j$, $j = \overline{m+1, n}$, т.е. Z^j - вектор коэффициентов разложения A^j в базисе B. Система (6) может быть представлена в форме жордановой таблицы:

$$\begin{array}{c|ccccc|} & x_{m+1} & \cdots & x_s & \cdots & x_n \\ \hline x_1 & z_{1m+1} & \cdots & z_{1s} & \cdots & z_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_r & z_{rm+1} & \cdots & \boxed{z_{rs}} & \cdots & z_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_m & z_{mm+1} & \cdots & z_{ms} & \cdots & z_{mn} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} z_{10} \\ \cdots \\ z_{r0} \\ \cdots \\ z_{m0} \end{array} \tag{7}$$

Легко построить базисное решение $\bar{x}$, соответствующее базису B и жордановой таблице (7), приравняв нулю небазисные переменные; тогда базисные переменные приравниваются свободным членам , т.е. $\bar{x}_B = Z^0$, $\bar{x}_D = 0$. Если свободные члены Z^0 все неотрицательны, то построенное базисное решение будет опорным. Переход к новому базисному решению осуществля-

ется с помощью одного шага жордановых исключений с разрешающим элементом $z_{rs} \neq 0$. Назовем r-ую строку таблицы разрешающей, а s-ый столбец - разрешающим. При этом меняются местами базисная переменная x_r и небазисная x_s. В результате получаем новую жорданову таблицу:

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & x_{m+1} & \cdots & x_r & \cdots & x_n & \\ \hline x_1 & z'_{1m+1} & \cdots & z'_{1r} & \cdots & z'_{1n} & z'_{10} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_s & z'_{rm+1} & \cdots & z'_{sr} & \cdots & z'_{rn} & z'_{r0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_m & z'_{mm+1} & \cdots & z'_{ms} & \cdots & z'_{mn} & z'_{m0} \end{array} \quad (8)$$

Элементы таблицы (8) получаются по следующим формулам (правила жордановых преобразований):

1) $z'_{sr} = \dfrac{1}{z_{rs}}$; 2) $z'_{sj} = \dfrac{z_{rj}}{z_{rs}}$, $j \neq s$;

3) $z'_{ir} = -\dfrac{z_{is}}{z_{rs}}$, $i \neq r$; 4) $z'_{ij} = z_{ij} - \dfrac{z_{is} * z_{rj}}{z_{rs}}$, $i \neq r, j \neq s$.

Пример 6. Построить жордановы таблицы для системы линейных уравнений примера 5, используя базисы B_2 и B_3.

Решение. В базисе $B_2 = \left\{ A^1, A^3 \right\}$ имеем:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \Rightarrow Z = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 7/8 \\ -1 & 1/2 & 5/8 \end{pmatrix}, \; Z^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Тогда жорданова форма системы и жорданова таблица имеют вид:

$$\begin{array}{ccc} x_2 & x_4 & x_5 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + \frac{1}{2}x_4 + \frac{7}{8}x_5 = 1\,, \\ \quad + x_3 - \quad x_2 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{5}{8}x_5 = 1\,, \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} x_1 \\ x_3 \end{array} \boxed{\begin{array}{ccc} 0 & 1/2 & 7/8 \\ -1 & 1/2 & 5/8 \end{array}} \begin{array}{c} = \\ = \end{array} \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}}$$

Базисное решение, соответствующее базису B_2, $x^2 = (1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)$. Чтобы перейти к базису B_3, сделаем шаг жордановых преобразований с разрешающим элементом $z_{35} = 5/8$. Тогда жорданова таблица и жорданова форма системы примут вид:

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_2 & x_4 & x_3 \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{ccc} 7/5 & -1/5 & -7/5 \\ -8/5 & 4/5 & 8/5 \end{array}} \end{array} = \boxed{\begin{array}{c} -2/5 \\ 8/5 \end{array}} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \quad + \frac{7}{5}x_2 - \frac{7}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 = 1\,, \\ \quad + x_5 - \frac{8}{5}x_2 + \frac{8}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4 = 1\,, \end{cases}$$

Этой таблице соответствует базисное решение $x^3 = (-2/5,\ 0,\ 0,\ 0,\ 8/5)$.

Замечание. Система уравнений (3) может быть преобразована к виду:

$$x_B = -\,Z\,x_D + Z^0\,, \text{или} \quad x_B = Z(-\,x_D) + Z^0 \qquad (9)$$

Тогда систему (9) можно представить модифицированной жордановой таблицей вида:

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \boxed{\begin{array}{ccccc} -x_{m+1} & \cdots & -x_s & \cdots & -x_n \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} x_1 \\ \cdots \\ x_r \\ \cdots \\ x_m \end{array}} \begin{array}{c} = \\ \\ = \\ \\ = \end{array} \boxed{\begin{array}{ccccc} z_{1m+1} & \cdots & z_{1s} & \cdots & z_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{rm+1} & \cdots & \boxed{z_{rs}} & \cdots & z_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{mm+1} & \cdots & z_{ms} & \cdots & z_{mn} \end{array}} \begin{array}{c} + \\ \\ + \\ \\ + \end{array} \boxed{\begin{array}{c} z_{10} \\ \cdots \\ z_{r0} \\ \cdots \\ z_{m0} \end{array}} \qquad (10)$$

Правила преобразования таблицы (10) при переходе от одного базиса к другому остаются прежними; поэтому мы не будем делать различия между этими формами записи, но будем оговаривать, где подразумевается знак равенства.

3.7. Задания

1. Построить остальные опорные решения системы уравнений примера 4.
2. Показать, что $\bar{x}=(4,\,0,\,0,\,0)$ есть опорное решение следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 8, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 4, \end{cases}$$

и построить все его базисы.

3. Определить вершины множества X, заданного системой линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \end{cases}$$

и изобразить его на плоскости $x_1 O x_2$.

4. Построить все опорные решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

5. По данной жордановой таблице построить базисное решение, его базис и жорданову форму системы линейных уравнений:

а)

	x_2	x_1	x_5		
x_4	0	2	-7/4	=	2
x_3	-1	-1	-1/4	=	0

б)

	x_1	x_3	x_6		
x_2	-1	2	1/2	=	6
x_4	3	5	-1/2	=	5
x_5	1/2	-3/2	2	=	4

3.8. Симплекс-метод

Рассмотрим задачу ЛП (линейного программирования):

$$\begin{aligned} f(x) = (c, x) &\to \max \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \qquad (11)$$

Для ее решения можно использовать симплекс-метод, идея которого состоит в последовательном продвижении по опорным решениям задачи (11) вплоть до получения оптимального решения или выяснения неразрешимости задачи.

3.8.1.Симплекс-таблица

Пусть $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m, 0, \ldots, 0)$ - опорный план задачи (11) и $B = (A^1, A^2, \ldots, A^m)$ - базис этого опорного решения. Умножим систему уравнений на B^{-1} и получим

$$x_B + \sum_{j=m+1}^{n} Z^j x_j = Z^0, \quad \text{где } x_B = (x_1, \ldots, x_m),\ Z^j = B^{-1}A^j,\ Z^0 = B^{-1}b.$$

Если в систему подставить точку $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m, 0, \ldots, 0)$, то окажется $\tilde{x}_B = Z^0$

.

Построим отвечающую им жорданову таблицу, пополнив ее строкой относительных оценок $\Delta_j (j = \overline{m+1, n})$ (такую таблицу будем называть симплексной). Для этого исключим базисные переменные из целевой функции:

$$f(x) = (c_B, x_B) + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j = (c_B, Z^0 - \sum_{j=m+1}^{n} x_j Z^j) + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j = (c_B, Z^0) -$$

$$- \sum_{j=m+1}^{n} ((c_B, Z^j) - c_j) x_j = f(\tilde{x}) - \sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j \quad ,$$

где

$$f(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{m} c_i \tilde{x}_i = (c_B, \tilde{x}_B), \tilde{x}_i = z_{i0} (i = \overline{1, m}),$$

и относительные оценки небазисных переменных:

$$\Delta_j = (c_B, Z^j) - c_j, \; j = \overline{1, n}. \qquad (12)$$

Симплекс-таблица

	x_{m+1}	…	x_s	…	x_n		
x_1	$Z_{1,m+1}$	…	$Z_{1,s}$	…	$Z_{1,n}$	=	$Z_{1,0}$
…	…	…	…	…	…	…	…
x_r	$Z_{r,m+1}$	…	$Z_{r,s}$	…	$Z_{r,n}$	=	$Z_{r,0}$
…	…	…	…	…	…	…	…
x_m	$Z_{m,m+1}$	…	$Z_{m,s}$	…	$Z_{m,n}$	=	$Z_{m,0}$
f	Δ_{m+1}	…	Δ_s	…	Δ_n	=	$f(\tilde{x})$

При этом оценки базисных переменных всегда равны нулю.

Напомним следующие утверждения.

Утверждение 1. (*Критерий оптимальности опорного плана).*

Невырожденный опорный план $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n)$ является оптимальным решением задачи (11) тогда и только тогда, когда $\Delta_j \geq 0$ для j=1,…,n.

З а м е ч а н и е. *Для вырожденного опорного плана* неотрицательность оценок является лишь достаточным условием его оптимальности.

Утверждение 2.*(Признак неограниченности целевой функции*).Если существует номер S, для которого $\Delta_s < 0$ и $\forall$i $z_{is} \leq 0$, то целевая функция задачи (11) не ограничена на множестве R допустимых решений этой задачи.

Утверждение 3. *(Возможность улучшения опорного плана*). Если существует S, для которого $\Delta_s < 0$ и среди z_{is} есть положительные, то выбрав разрешающий элемент z_{rs} по правилу:

$$\frac{z_{r0}}{z_{rs}} = \min\left\{\frac{z_{i0}}{z_{is}}, z_{is} > 0\right\}, \qquad (13)$$

можно за один шаг жордановых преобразований перейти к новому опорному плану $\tilde{\tilde{x}}$, причем

$$f(\tilde{\tilde{x}}) = f(\tilde{x}) - \Delta_s \frac{z_{r0}}{z_{rs}},$$

и если $z_{r0}>0$, то $f(\tilde{\tilde{x}}) > f(\tilde{x})$.

Итак, для любого опорного плана $\tilde{x}$ задачи ЛП (11) с базисом *B* на основании утверждений (1)-(3) можно провести исследования и выявить:
либо оптимальность плана $\tilde{x}$; либо неразрешимость задачи; либо возможность перехода к новому плану $\tilde{\tilde{x}}$ (а значит и к новому базису B′), связанному с большим (или с не меньшим) значением целевой функции.

Реализация симплекс-метода упирается в построение начальной симплексной таблицы.

3.8.2.Алгоритм симплекс-метода

Приведем пошаговое описание симплекс-метода.

1. Построить начальную симплексную таблицу: $\left\|Z_{ij}\right\|_m^n, Z_{i0}, (i=\overline{1,m}), \Delta_j (j=\overline{1,n}), f(x^0)$.
2. Если все $\Delta_j \geq 0$, то перейти на шаг 5. Если существует j=s такое, что $\Delta_s<0$, то выбираем s-й столбец разрешающим.
3. Выбираем разрешающую строку r по правилу: $\frac{z_{r0}}{z_{rs}} = \min\left\{\frac{z_{i0}}{z_{is}}, z_{is} > 0\right\}$. Если $z_{is} < 0 \ (\forall i)$, то делаем вывод, что *f(x)* не ограничена сверху в области допустимых решений задачи (Нр2) и переходим на шаг 6.
4. Провести жордановы преобразования симплекс-таблицы с разрешающим элементом z_{rs} и перейти на шаг 2.
5. Симплекс-таблица оптимальна, т.е. определяет оптимальное решение задачи и максимальное значение целевой функции.
6. Решение задачи завершено.

3.8.3.Построение начальной симплексной таблицы

Остановимся на построении начальной симплексной таблицы для некоторых форм задач линейного программирования.

1.Пусть задача ЛП дана в стандартной форме

$$\begin{aligned} &f(x) = (c, x) \to \max \\ &Ax \le b \\ &x \ge 0. \end{aligned} \qquad (14)$$

От формы (14) легко перейти к канонической, добавив в каждое из ограничений слабую переменную.

Получим

$$\begin{aligned} &f(x) = (c, x) \to \max \\ &Ax + Eu = b, \\ &x \ge 0, u \ge 0, \end{aligned} \qquad (15)$$

где *E*-диагональная матрица порядка *m*.

Вектор $(\underset{1}{0}, \underset{2}{0}, \underset{3}{0}, b_1, b_2, ..., b_m)$ будет опорным решением задачи (15)с базисом $B=E$.

Итак, получаем начальную симплексную таблицу, в которой $Z = A, Z^0 = b, \Delta_j = -c_j, j = \overline{1,n}$:

	x		
U	A	=	b
f	-c	=	0

2.Задача ЛП задана в канонической форме

$$\begin{aligned} &f(x) = (c, x) \to \max \\ &Ax = b \\ &x \ge 0. \end{aligned}$$

Не нарушая общности, можно считать $b \ge 0$. Пусть матрица A содержит *m* единичных ортов. Можно считать, что $A^1 = e^1, A^2 = e^2, ..., A^m = e^m$. Симплексная таблица при этом имеет следующий вид:

		c_{m+1}	…	c_n		
c_B		x_{m+1}	…	x_n		
c_1	x_1	$a_{1,m+1}$	…	$a_{m,n}$	=	b_1
…	…	…	…	…	…	…
c_m	x_m	$a_{m,m+1}$	…	$a_{m,n}$	=	b_m

f	Δ_{m+1}	$\cdots$	Δ_{m+1}	$=$	$\tilde{f}$

где

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j = (c_B, A^j) - c_j,\ j = \overline{m+1, n},$$

$$\tilde{f} = f(x^0) = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i = (c_B, b). \qquad (16)$$

3. Задача ЛП задана в канонической форме

$$\begin{aligned} & f(x) = (c, x) \to \max \\ & Ax = b, \qquad \text{и} \quad b \geq 0. \\ & x \geq 0, \end{aligned} \qquad (17)$$

Пусть матрица A не содержит m единичных ортов. Тогда для определения начального опорного плана используется *метод искусственного базиса.* Для этого рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{aligned} & F(x, w) = -\sum_{i=1}^{m} w_i \to \max \\ & Ax + Ew = b, \qquad \text{и} \quad b \geq 0. \\ & x \geq 0, w \geq 0, \end{aligned} \qquad (18)$$

Очевидно, что вектор $(x^0, w^0) = (\underbrace{0,...,0}_{n}, b_1,..., b_m)$ является опорным решением задачи (18).

Справедливы утверждения:

Утверждение 4. Задача (18) всегда разрешима и $\max F(x, w) \leq 0$.

Утверждение 5. Если $\max F(x, w) < 0$, то система ограничений задачи (17) противоречива.

Утверждение 6. Если $\max F(x, w) = 0$, и вектор $(\tilde{x}_1,..., \tilde{x}_n, \tilde{w}_1,..., \tilde{w}_m)$ - оптимальный опорный план задачи (18), то вектор $(\tilde{x}_1,..., \tilde{x}_n)$ является опорным планом задачи (17).

При этом из оптимальной симплекс-таблицы (С-Т) задачи (18) можно построить начальную симплекс-таблицу задачи (17). Рассмотрим возможные ситуации.

Ранг матрицы A равен m, задача (17) невырожденная. Тогда в опти-

мальной С-Т задачи (18) все искус- ственные переменные будут небазисными и для получения начальной С-Т нужно вычеркнуть все столбцы, отвечающие искусственным переменным, и пересчитать оценки, используя функцию *f(x)* и формулу (12).

Ранг матрицы А меньше m, задача (17) невырожденная. Тогда в оптимальной С-Т задачи (18) среди базисных переменных могут оказаться искусственные переменные. В соответствующих строках все элементы будут равны 0. Вычеркнув все 0-строки, получим первый случай.

Ранг матрицы А равен m, задача (17) вырожденная. Тогда в оптимальной С-Т задачи (18) среди базисных переменных могут оказаться искусственные переменные. В соответствующих строках элементы столбца Z^0 равны 0, но среди остальных элементов этих строк будут элементы, отличные от 0. Выбрав любой из них в качестве *разрешающего* и выполнив жорданово преобразование С-Т, выведем искусственную переменную из базиса. Эти действия повторяем до тех пор, пока все искусственные переменные ни будут выведены из базиса. При этом получим первый случай.

3.8.4.Примеры использования симплекс-метода

Пример 7. Решить симплекс-методом следующую задачу.

$$\begin{aligned} & f(x) = 2x_1 + x_2 \to \max \\ & -x_1 + 3x_2 \le 6 \\ & 2x_1 + x_2 \le 9 \\ & x_1 - x_2 \le 3 \\ & x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{aligned} \qquad (19)$$

Добавим в ограничения слабые переменные u_1, u_2, u_3 и перейдем к канонической форме

$$\begin{aligned} & f(x) = 2x_1 + x_2 \to \max \\ & -x_1 + 3x_2 + u_1 = 6 \\ & 2x_1 + x_2 + u_2 = 9 \\ & x_1 - x_2 + u_3 = 3 \\ & x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; u_1 \ge 0; u_2 \ge 0; u_3 \ge 0; \end{aligned} \qquad (20)$$

В качестве начального опорного плана выберем вектор x^0=(0,0,6,9,3). Ему

отвечает базис $B=\{e^1,e^2,e^3\}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ и симплекс-таблица 1.

Таблица 1

	x_1	X_2	
u_1	-1	3	6
u_2	2	1	9
u_3	1	-1	3
f	-2	-1	0

$\Rightarrow$

Таблица 2

	u_3	x_2	
u_1	1	2	9
u_2	-2	3	3
x_1	1	-1	3
f	2	-3	6

Так как оценки в С-Т (табл.1) отрицательны , то план x^0 не является оптимальным. Выбрав разрешающим любой столбец с отрицательной оценкой, введем его в базис. Пусть выбран первый столбец, то есть S=1. Выбор разрешающей строки осуществим по правилу(13) $\min\left\{\frac{9}{2},\frac{3}{1}\right\}=\frac{3}{1}$. Откуда получим , что разрешающей строкой должна быть выбрана 3-я строка. На пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки находится разрешающий элемент $z_{3,1}=1$(выделим этот элемент). Сделав шаг жордановых преобразований, получаем таблицу 2.

Симплексная таблица 2 не является оптимальной. Она отвечает неоптимальному опорному решению x^1=(3,0,9,3,0) с базисом B=(e^1,e^2,A^1). При этом f(x^1)=6>f(x^0)=0. На основании утверждения 3 мы можем вновь улучшить значение целевой функции. Теперь главным столбцом может быть выбран только 2-й столбец, а главной строкой - 2-я строка. Проводим жордановы преобразования и получаем таблицу 3.

Таблица 3

	u_3	u_2	
u_1	7/3	-2/3	7
x_2	-2/3	1/3	1
x_1	1/3	1/3	4
f	0	1	9

Из утверждения 1 следует, что таблица 3 дает оптимальный опорный план x^2=(4,1,7,0,0) и максимальное значение целевой функции $f^*_{\max}$=9.

В полученной оптимальной таблице есть нулевая оценка. Это означает, что

рассматриваемая задача имеет бесчисленное множество оптимальных решений. Перейдем к другому оптимальному опорному решению, выбрав в качестве разрешающего столбца столбец с нулевой оценкой. В результате получим таблицу 4. Ей отвечает новый оптимальный план $x^3 = (3,3,0,0,3)$. Тогда множество всех оптимальных решений задачи (20) имеет вид $x^* = \alpha x^2 + (1-\alpha)x^3, \quad \alpha \in [0,1]$., и, соответственно, оптимальным решением задачи (19) будет

$$x^*=(3+\alpha,3-2\alpha,7\alpha), \text{ где } \alpha\in[0,1], \qquad (21)$$

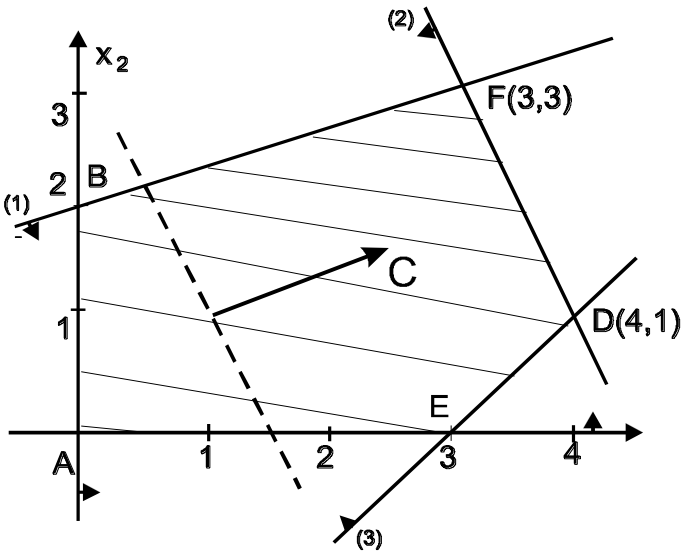
а оптимальным значением целевой функции этой задачи будет $f^*_{\max}$=9.

Таблица 4

	u_1	u_2	
u_3	3/7	-2/7	3
x_2	2/7	1/7	3
x_1	-1/7	3/7	3
f	0	1	9

Проиллюстрируем решение примера 7 графически (рис.6).

Рис.6. Графическое решение примера 7



Многоугольник ABFDE Изображает множество допустимых решений примера 7. Решая задачу симплекс-методом, мы последовательно находим опорные решения x^0, x^1, x^2, x^3, что геометрически соответствует перемещению по вершинам A,E,D,F.

На рисунке видно, что функция $f(x) = 2x_1 + x_2$ достигает максимума на ребре [F,D], то есть на множестве точек (21).

Пример 8. Решить симплекс-методом следующую задачу.

$$f(x)=2x_1-x_2+3x_3+x_4 \to \max$$

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2-3x_3 &= 10 \\ x_1+x_3+x_4 &= 7 \\ 3x_1+2x_3-x_5 &= -4 \\ x_j \geq 0,\ j=\overline{1,5}. \end{aligned}$$

Перейдем к системе уравнений с неотрицательными правыми частями. Для этого умножим обе части третьего уравнения на –1. Получим:

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2-3x_3 &= 10, \\ x_1+x_3+x_4 &= 7, \\ -3x_1-2x_3+x_5 &= 4. \\ x_j \geq 0,\ j=\overline{1,5}. \end{aligned}$$

Решение задачи можно начать с опорного плана $x^0=(0,10,0,7,4)$, отвечающего базису $B^0=\{A^2,A^4,A^5\}$. Соответствующая симплексная таблица имеет вид:

Таблица 5

		2	3	
c_B		x_1	x_3	
-1	x_2	2	-3	10
1	x_4	1	1	7
0	x_5	-3	-2	4
	F	-3	1	-3

Оценки в таблице 5 подсчитаны по формулам(12):

$$\Delta_1=(c_B,A^1)-c_1=-3;\quad \Delta_3=(c_B,A^3)-c_3=1;\quad f=(c_B,b)=-3.$$

В качестве разрешающего столбца берем первый ($\Delta_1<0$), в качестве разрешающей строки – первую, так как $\min\left\{\frac{10}{2},\frac{7}{1}\right\}=\frac{10}{2}$. Проводим жордановы преобразования и переходим к таблице 6, а затем аналогично и к таблице 7.

Таблица 6

	x_2	X_3	
x_1	1/2	-3/2	5
x_4	-1/2	5/2	2
x_5	3/2	-13/2	19
f	3/2	-7/2	12

$\Rightarrow$

Таблица 7

	x_2	x_4	
x_1	1/5	3/5	31/5
x_3	-1/5	2/5	4/5
x_5	1/5	13/5	121/5
f	4/5	7/5	74/5

Таблица 7 дает единственное оптимальное решение задачи x^*

=(31/5,0,4/5,0,121/5), $f^* = 74/5$.

Пример 9. Решить симплекс-методом следующую задачу. Для построения начальной С-Т использовать метод искусственного базиса.

$$
\begin{aligned}
&f(x)=x_1+x_2+x_3+x_4 \to \max\\
&x_1-x_2-2x_3+x_4-x_5=6,\\
&-x_1+x_3+x_6=2,\\
&2x_2-3x_3+2x_4+x_7=8,\\
&x_j\ge 0,\ j=\overline{1,7}.
\end{aligned}
$$

В матрице А отсутствует полный набор ортов. Поэтому матрицу А дополняем столбцом $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, добавив в первое ограничение искусственную переменную W_1. При этом рассмотрим следующую вспомогательную задачу

$$
\begin{aligned}
&F(x,w)=-W_1 \to \max\\
&x_1-x_2-2x_3+x_4-x_5+W_1=6,\\
&-x_1+x_3+x_6=2, \qquad (22)\\
&2x_2-3x_3+2x_4+x_7=8,\\
&x_j\ge 0,\ j=\overline{1,7}.
\end{aligned}
$$

Для этой задачи (x^0, w^0)=(0,0,0,0,0,2,8,6) есть опорное решение, отвечающее единичному базису. Начальная симплекс-таблица для задачи (22) имеет вид таблицы 8.

Таблица 8

c_B		0	0	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-1	w_1	1	-1	-2	1	-1	6
0	x_6	-1	0	1	0	0	2
0	x_7	0	2	3	2	0	8
	F	-1	1	2	-1	1	-6

Выбрав в таблице 8 разрешающий столбец (первый) и разрешающую строку (первую), после выполнения жордановых преобразований получаем таблицу 9, оптимальную для задачи (22). При этом *max F(x,w)=0*.

Вычеркнув *F*-строку относительных оценок и столбец, отвечающий искусственной переменной w_1 (он выделен в таблице 9), добавим f-строку относительных оценок: $\Delta_2 = \left(c^B, Z^2\right) - c_2 = -2, \Delta_4 = 0, \Delta_3 == -3, \Delta_5 = -1,$ и получим таблицу 10. Таблица 10 является начальной С-Т для исходной задачи.

В таблице 10 оценка Δ_3=-3<0, а остальные элементы этого столбца $z_{i,3}\le 0$.

Тогда на основании утверждения 2 исходная задача неразрешима в силу неограниченности целевой функции сверху в области допустимых решений (Нр2).

Таблица 9

	w_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	-1	-2	1	-1	6
x_6	1	-1	-1	1	-1	8
x_7	0	2	-3	2	0	8
F	1	0	0	0	0	0

$\Rightarrow$

Таблица 10

c_B		1	1	1	0	
		x_2	x_3	x_4	x_5	
1	x_1	-1	-2	1	-1	6
0	x_6	-1	-1	1	-1	8
0	x_7	2	-3	2	0	8
	f	-2	-3	0	-1	6

Пример 10. Решить симплекс-методом задачу (23). Для построения начальной С-Т использовать метод искусственного базиса.

$$\begin{aligned} &f(x)=3x_1+x_2+x_3\to \max \\ &2x_1-x_2+x_3=6 \\ &x_1-2x_2-x_3=2 \\ &x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}. \end{aligned} \qquad (23)$$

Построим вспомогательную задачу:

$$\begin{aligned} &F(x,w)=-w_1-w_2\to \max \\ &2x_1-x_2+x_3+w_1=6 \\ &x_1-2x_2-x_3+w_2=2 \\ &x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3},\ w_i\ge 0,\ i=\overline{1,2}. \end{aligned} \qquad (24)$$

Решим задачу (24) симплекс-методом (табл.12,13).

Таблица 12

c_B		0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	
-1	w_1	2	-1	1	6
-1	w_2	1	-2	-1	4
	F	-3	3	0	-10

$\Rightarrow$

Таблица 13

	w_1	x_2	x_3	
x_1		-1/2	1/2	3
w_2		-3/2	-3/2	1
F		3/2	3/2	-1

Так как все оценки в таблице 13 неотрицательны, то эта таблица определяет оптимальное опорное решение вспомогательной задачи(24). При этом *maxF(x,w)*=-1<0. Опираясь на утверждение 5, делаем вывод: у исходной задачи (23) система ограничений противоречива (Нр1).

Пример 11. Решить симплекс-методом линейную задачу. Для построения начальной С-Т использовать метод искусственного базиса.

Исходная задача:

$f(x)=x_1+x_2+2x_3+x_4\to \max$

Вспомогательная задача:

$F(x,w)=-w_1-w_2-w_3\to \max$

$$\begin{aligned} x_1+3x_2+2x_3+x_4&=8\ ,\\ 2x_1\quad+x_3-x_4&=1\ ,\\ -3x_1+x_2-x_3+2x_4&=1\ ,\\ x_j\ge 0,\ j&=\overline{1,4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1+3x_2+2x_3+x_4+w_1&=8\ ,\\ 2x_1\quad+x_3-x_4+w_2&=1\ ,\\ -3x_1+x_2-x_3+2x_4+w_3&=1\ ,\\ x_j\ge 0,\ j&=\overline{1,4}.\ w_i\ge 0,\ i=\overline{1,3}. \end{aligned}$$

Решение вспомогательной задачи представляют таблицы 14-16.

Таблица 14

	x_1	x_2	x_3	x_4	
w_1	1	3	2	1	8
w_2	2	0	1	-1	1
w_3	-3	1	-1	2	1
F	0	-4	-2	-2	-10

$\Rightarrow$

Таблица 15

	x_1	x_3	x_4	
w_1	10	5	-5	5
w_2	2	1	-1	1
x_2	-3	-1	2	1
F	-12	-6	6	-6

$\Rightarrow$

В таблице 16 все элементы строки с искусственной переменной w_1 равны 0. Это означает, что первое ограничение является линейной комбинацией двух других. В таблице 16 вычеркиваем w_1-строку и F-строку и считаем f-строку. В результате получаем начальную С-Т для исходной задачи (табл.17).

Таблица 16

	x_3	x_4	
w_1	0	0	0
x_1	1/2	-1/2	1/2
x_2	1/2	1/2	5/2
F	0	0	0

$\Rightarrow$

Таблица 17

		2	1	
	c_B	x_3	x_4	
x_1	1	1/2	-1/2	1/2
x_2	1	1/2	1/2	5/2
f		-1	-1	3

$\Rightarrow$

В таблицах 17-19 представлено решение исходной задачи.

Таблица 18

	x_1	x_4	
x_3	2	-1	1
x_2	-1	1	2
f	2	-2	4

$\Rightarrow$

Таблица 19

	x_1	x_2	
x_3	1	1	3
x_4	-1	1	2
f	0	2	8

$\Rightarrow$

Используя оптимальную С-Т исходной задачи (табл.19), можно выписать оптимальное решение исходной задачи $x^*=(0,0,3,2)$ и оптимальное значение целевой функции этой задачи $f^*_{max}=f(x^*)=8$.

Пример 12. Решить симплекс-методом задачу. Для построения начальной С-Т использовать метод искусственного базиса. Этот пример иллюстрирует ситуацию вырожденности.

Исходная задача:

$$\begin{aligned} f(x)&=2x_1+3x_2\to\max\\ x_1+x_2+x_3+x_4&=1 \end{aligned}$$

Вспомогательная задача:

$$\begin{aligned} F(x,w)&=-w_1-w_2\to\max\\ x_1+x_2+x_3+x_4+w_1&=1 \end{aligned}$$

$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}$.

$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + w_2 = 1$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4},\ w_i \geq 0,\ i = \overline{1,2}$.

Строим таблицы:

Таблица 20

	x_1	x_2	X_3	x_4	
w_1	1	1	1	1	1
w_2	1	-1	1	-1	1
F	-2	0	-2	0	-2

$\Rightarrow$

Таблица 21

	w_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	1	1	1	1
w_2	-1	-2	0	-2	0
F	2	2	0	2	0

Таблица 21 является оптимальной С-Т вспомогательной задачи и $F^*=0$. Однако, в базисе есть искусственная перменная w_2. Выведем переменную w_2 из базиса, взяв разрешающей строку 2. В качестве разрешающего элемента можно взять любой отличный от нуля элемент из этой строки (этот элемент выделен в таблице 21 и равен -2).

Таблица 22

	w_2	x_3	x_4	
x_1	1/2	1	0	1
x_2	-1/2	0	1	0
F	1	0	0	0

$\Rightarrow$

Таблица 23

		0	0	
		x_3	X_4	
2	x_1	1	0	1
3	x_2	0	1	0
	f	2	3	2

$\Rightarrow$

Вычеркнув в таблице 22 w_2 – столбец, F-строку и вычислив f-строку, получим таблицу 23. Таблица 23 определяет оптимальное решение исходной задачи $x^*=(1,0,0,0)$ и оптимальное значение целевой функции $f^*=2$.

Пример 13. Решить симплекс-методом задачу

$$f(x)=x_1+4x_2+x_3+x_4-2x_5+x_6 \to \max$$

$$x_1+x_2+x_4=0,$$

$$x_1+x_2+x_3+x_5=1,$$

$$x_2+x_3+x_6=1,$$

$$x_j \geq 0,\ j=\overline{1,6}.$$

Таблица 24

		1	4	1	
		x_1	X_2	x_3	
1	x_4	1	1	0	0
-2	x_5	1	1	1	1
1	x_6	0	1	1	1
	f	-2	-4	-2	-1

$\Rightarrow$

Таблица 25

	x_1	x_2	x_5	
x_4	1	1	0	0
x_3	1	1	1	1
x_6	-1	0	-1	0
f	0	-2	2	1

$\Rightarrow$

Таблица 26

	x_1	x_4	X_5	
x_2	1	1	0	0
x_3	0	-1	1	1
x_6	-1	0	-1	0
f	2	2	2	1

Таблицы 25 и 26 описывают одно и то же опорное вырожденное решение (0,0,1,0,0,0), являющееся оптимальным. Но этим таблицам отвечают различные базисы: таблице 25 соответствует базис B=$\{A^3, A^4, A^6\}$, а таблице26 – базис B*= $\{A^2, A^3, A^6\}$. В базисе B оценка $\Delta_2<0$, а в базисе B* все $\Delta_j \geq 0$.

Этот пример подтверждает, что *для вырожденного опорного плана* неотрицательность оценок является лишь достаточным условием его оптимальности.

4.ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ

4.1. Составление математических моделей двойственных задач

Любой задаче линейного программирования, называемой *исходной* или *прямой*, можно поставить в соответствие другую задачу, которая называется *двойственной* или *сопряженной*. Обе эти задачи образуют пару двойственных (или сопряженных) задач. Каждая из задач является двойственной к другой задаче рассматриваемой пары.

В теории двойственности используются четыре пары двойственных задач (приведем их в матричной форме записи):

Исходная задача ***Двойственная задача***

Симметричные пары

1. $Z(X)=CX \to \max$, $F(Y)=BY \to \min$,
   $AX \leq B$; $AY \geq C$; **(26)**
   $X \geq \Theta$; $Y \geq \Theta$.
2. $Z(X)=CX \to \min$, $F(Y)=BY \to \max$,
   $AX \geq B$; $AY \leq C$; **(27)**
   $X \geq \Theta$; $Y \geq \Theta$.

Несимметричные пары

3. $Z(X)=CX \to \max$, $F(Y)=BY \to \min$,
   $AX = B$; $AY \geq C$; **(28)**
   $X \geq \Theta$; Y – любое.
4. $Z(X)=CX \to \min$, $F(Y)=BY \to \max$,
   $AX = B$; $AY \leq C$; **(29)**
   $X \geq \Theta$; Y - любое.

Здесь $C=(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Правила составления двойственных задач:

1. Во всех ограничениях исходной задачи свободные члены должны находится в правой части, а члены с неизвестными – в левой.
2. Ограничения – неравенства исходной части должны быть записаны так, чтобы знаки неравенств у них были направлены в сторону.
3. Если неравенств ограничениях исходной задачи «≤», то целевая функция $Z(X)=c_0+c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$ должна максимизироваться, а если «≥», то минимизировать.
4. Каждому ограничению исходной задачи соответствует неизвестное в двойственной задаче; при этом неизвестное, отвечающее ограничению-неравенству, должно удовлетворять условию неотрицательности, а неизвестное, отвечающее ограничению-равенству, может быть любого знака.
5. Целевая функция двойственной задачи имеет вид:

   $F(Y)=c_0+b_1y_1+b_2y_2+\ldots+b_my_m$,

где c_0 – свободный член целевой функции Z(X) исходной задачи, b_1, b_2, …, b_m - свободные члены в ограничениях исходной задачи, при этом b_i – свободный член именно того ограничения исходной задачи, которому соответствует неизвестная y_i, а y_1, y_2, …, y_m – неизвестные в двойственной задаче.

6. Целевая функция F(Y) двойственной задачи должна оптимизироваться противоположным по сравнению с Z(X) образом, если Z(X)→min, то F(Y)→max, если Z(X))→max, то F(Y)→ min.
7. Каждому неизвестному x_j, $j=\overline{1,n}$ исходной задачи соответствует ограничение в двойственной задаче. Совокупность этих n ограничений (вместе с условиями неотрицательности неизвестных y_i, соответствующих ограничениям-неравенствам исходной задачи) образует систему ограничений двойственной задачи. Все ограничения двойственной задачи имеют вид неравенств, свободные члены которых находятся в правых частях, а члены с неизвестными y_1, y_2,…,y_m – в левых. Все знаки неравенств имеют вид «≥», если F(Y)→min, и «≤», если F(Y)→max.

Коэффициенты, с которыми неизвестные y_1, y_2,…,y_m входят в ограничение, соответствующее неизвестному x_j в ограничениях исходной задачи, а именно коэффициент при y_i совпадает с тем коэффициентом при x_j, с кото-

рым x_j входит в ограничение исход- ной задачи, соответствующее неизвестному y_i.

4.2. Первая теорема двойственности

Теоремы двойственности позволяют установить взаимосвязь между оптимальными решениями пары двойственных задач. Решив одну из пары двойственных задач, можно или найти оптимальное решение другой задачи. Не решая ее, или установить его отсутствие. Возможны следующие случаи:

1) Обе задачи из пары двойственных имеют оптимальные решения;
2) Одна из задач не имеет решения в виду неограниченности целевой функции, а другая не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

Теорема. Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальное решение, то и двойственная к ней имеет оптимальное решение; причем значения целевых функций задач на своих оптимальных решений совпадают.

Если одна из пары двойственных задач не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции, то другая не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

Пример 14. Составить по общему правилу двойственную задачу к исходной задаче линейного программирования. Решить исходную задачу симплексным методом. Найти оптимальное решение двойственной задачи из первой и последней симплексных таблиц исходной задачи (с помощью векторной и матричной формул).

$$Z(\overline{X}) = 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \qquad\quad \le 2, \\ \ \ x_1 + x_2 + x_3 \ \le 4, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 6 \end{cases} \left| \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix} \right.$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 3}.$$

Решение: Данная задача имеет вид исходной задачи первой симметричной пары двойственных задач (6.1). Записываем двойственную задачу:

$$F(\overline{Y}) = 2y_1 + 4y_2 + 6y_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 6, \\ \ \ y_1 + y_2 - \ \ y_3 \ge 5, \\ \qquad\quad y_2 + 2y_3 \ge 2 \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Решим исходную задачу симплексным методом. Вводя неотрицательные дополнительные переменные x_4, x_5, x_6, приводим задачу к каноническому виду:

$$Z(\overline{X}) = 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \qquad + x_4 \qquad\qquad = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 \qquad + x_5 \qquad = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \qquad\qquad + x_6 = 6 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}.$$

Находим начальное опорное решение $\overline{X_1} = \{0, 0, 0, 2, 4, 6\}$ с базисом из единичных векторов $Б_1 = \{\overline{A_4}, \overline{A_5}, \overline{A_6}\}$. Решение задачи симплексным методом проводим в симплексных таблицах (табл. 27):

Таблица 27

Б	c_k / $c_б$	$\overline{A_0}$	6 $\overline{A_1}$	5 $\overline{A_2}\downarrow$	2 $\overline{A_3}\downarrow$	0 $\overline{A_4}$	0 $\overline{A_5}$	0 $\overline{A_6}$	Θ_1	Θ_2	Θ_3
$\overline{A_4}$	0	2	2	$\boxed{1}$	0	1	0	0	1	2	_
$\overline{A_5}$	0	4	1	1	1	0	1	0	4	4	4
$\overline{A_6}$	0	6	2	-1	2	0	0	1	3	_	3
Δk		0	-6	-5	-2	0	0	0	Θ_3		
$\overline{A_2}$	5	2	2	1	0	1	0	0	_		
$\overline{A_5}$	0	2	-1	0	$\boxed{1}$	-1	1	0	2		
$\overline{A_6}$	0	8	4	0	2	1	0	1	4		
Δk		10	4	0	-2	5	0	0			
$\overline{A_2}$	5	2	2	1	0	1	0	0	$\max Z(\overline{X}) = 14$		
$\overline{A_3}$	2	2	-1	0	1	-1	1	0	$\overline{X}^* = (0, 2, 2)$		
$\overline{A_6}$	0	4	6	0	0	3	-2	1	$Б^* = \{\overline{A_2}, \overline{A_3}, \overline{A_6}\}$		
Δk		14	2	0	0	3	2	0			

Оптимальное решение исходной задачи $\overline{X}^* = \{0, 2, 2, 0, 0, 4\}$, его базис $Б^* = \{\overline{A_2}, \overline{A_3}, \overline{A_6}\}$, значение целевой функции $\max Z(\overline{X}) = Z(\overline{X}^*) = 14$.

Оптимальное решение двойственной задачи к исходной можно найти по формуле:

$$\overline{Y}^* = C^* D^{-1} \tag{30}$$

Матрица D состоит из координат векторов $\overline{A_2}, \overline{A_3}, \overline{A_6}$, входящих в базис опорного решения исходной задачи:

$$D=\left(\overline{A_2},\overline{A_3},\overline{A_6}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Матрица D^{-1} находится в последней симплексной таблице. Ее столбцы располагаются под столбцами единичной матрицы, то есть под единичными векторами $\overline{A_4}$, $\overline{A_5}$, $\overline{A_6}$, образующих базис начального опорного решения:

$$D^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

Координатами вектора C^* являются коэффициенты целевой функции при базисных неизвестных оптимального решения x_2, x_3, x_6. Данные коэффициенты записываются в том же порядке, в каком векторы условий входят в базис оптимального решения, то есть $C^*=(5, 2, 0)$.

Вычисляем $Y^*=C^*\cdot D^{-1}=(5,2,0)\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}=(3,2,0).$

Оптимальное решение двойственной задачи можно найти проще, по формуле:

$$y_j^*=\Delta_j^*+c_j^*,\ \ j=\overline{1,3} \qquad (31)$$

Для этого необходимо к оценкам разложений по базису оптимального решения векторов $\overline{A_4}$, $\overline{A_5}$, $\overline{A_6}$, входящих в базис начального опорного решения, то есть к оценкам этих векторов в последней симплексной таблице, прибавить соответствующие коэффициенты целевой функции:

$y_1^*= 3+0=3$, $y_2^*= 2+0=2$, $y_3^*= 0+0=0$.

Ответ: $F_{\min}(\overline{Y})=F(\overline{Y}^*)=14$ *при* $\overline{Y}^*(3;\,2;\,0)$.

4.3. Вторая теорема двойственности

Пусть имеется симметричная пара двойственных задач

$$Z(X)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\to\max,\qquad F(Y)=\sum_{i=1}^{m}b_iy_i\to\min,$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i,\quad i=\overline{1,m},\qquad \sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i\le c_j,\quad j=\overline{1,n}, \qquad (32)$$

$$x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,n};\qquad y_i\ge 0,\quad j=\overline{1,m}.$$

Теорема. Для того, чтобы допустимые решения $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ являлись оптимальными решениями пары двойственных задач, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$x_j\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_j-c_j\right)=0,\quad j=\overline{1,n}; \qquad (33)$$

$$y_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - c_j\right) = 0, \quad i = \overline{1,m}. \qquad (34)$$

Иначе, если при подстановке оптимального решения в систему ограничений *i*-ое ограничение исходной задачи выполняется как строгое неравенство, то *i*-я координата оптимального решения двойственной задачи равна нулю, и, наоборот, если *i*-я координата оптимального решения двойственной задачи отлична от нуля, то *i*-ое ограничение исходной задачи удовлетворяется оптимальным решением как равенство.

Пример 15. Составить по общему правилу двойственную задачу к исходной задаче линейного программирования. Решить исходную задачу графическим методом. Найти оптимальное решение двойственной задачи с помощью канонической теоремы равновесия.

$$Z(\overline{X}) = 6x_1 + 30x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} -2x_1 - \ \ x_2 \le -2, \\ -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 + 4x_2 \le 14, \\ 2x_1 - 5x_2 \le 2 \end{cases} \left| \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \right.$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Решение: Составим двойственную задачу:

$$Z(\overline{Y}) = -2y_1 - y_2 + 14y_3 + 2y_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} -2y_1 - \ \ y_2 + y_3 + 2y_4 \ge 6, \\ -y_1 + 2y_2 + 4y_3 - 5y_4 \ge 30, \end{cases}$$

$$y_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}$$

Решим исходную задачу графическим методом. Каждое неравенство системы ограничений представляет собой некоторую полуплоскость с граничной прямой:

L_1: $-2x_1-x_2= -2$, следовательно $x_2=2-2x_1$

x_1	0	1
x_2	2	0

L_2: $-x_1+2x_2= 4$, следовательно $x_2 = \dfrac{4+x_1}{2}$

x_1	0	2
x_2	2	3

L_3: $x_1+4x_2= 14$, следовательно $x_2 = \dfrac{14-x_1}{4}$

x_1	2	6
x_2	3	2

L_4: $2x_1-5x_2= 2$, следовательно $x_2 = \dfrac{2x_1-2}{5}$

L_5: $x_1=0$

L_6: $x_2=0$

x_1	1	6
x_2	0	2

$$\overline{X}^* = (2;\,3).$$

$$\overline{X}^* = L_2 \cap L_3.$$

$$+\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 4, \ (L_2) \\ x_1 + 4x_2 = 14, \ (L_3) \end{cases}$$

$$6x_2 = 18$$

$x_2^*=3$, $x_1^*=14 - 4x_2^*=2$, следовательно $\overline{X}^* = (2;\,3)$.

$$Z\left(\overline{X}^*\right) = 6\cdot 2 + 30\cdot 3 = 102.$$

Подставим оптимальное решение $\overline{X}^* = (2;\,3)$ в систему ограничений. Получим, что ограничения (1) и (4) выполняются как строгие неравенства:

$$\begin{cases} -2\cdot 2 - 3 < -2, \Rightarrow y_1^* = 0 \\ -2 + 2\cdot 3 = 4, \\ 2 + 4\cdot 3 = 14, \\ 2\cdot 2 - 5\cdot 3 < 2, \Rightarrow y_4^* = 0. \end{cases}$$

Согласно второй теоремы двойственности соответствующие координаты оптимального решения двойственной задачи к исходной равны нулю: $y_1^*=y_4^*=0$. Учитывая это, из системы ограничений двойственной задачи получим:

$$\begin{cases} -2y_1^* - y_2^* + y_3^* + 2y_4^* - 6 = 0 \\ -y_1^* + 2y_2^* + 4y_3^* - 5y_4^* - 30 = 0 \end{cases} \Rightarrow \textit{при } y_2^* = 0,\ y_4^* = 0$$

$$+\begin{cases} -y_2^* + y_3^* = 6 \\ 2y_2^* + 4y_3^* = 30 \end{cases} \Bigg| \times 2$$

$$6y_3^* = 42$$

$$y_3^* = 7 \Rightarrow y_2^* = 1 \Rightarrow \overline{Y}^* = (0,\,1,\,7,\,0).$$

Ответ: $F_{\min}(\overline{Y}^*) = 102$ *при* $\overline{Y}^*(0,\,1,\,7,\,0)$.

4.4. Метод Гомори решения задач целочисленного программирования

В общем случае *задача целочисленного программирования* формулируется следующим образом:

найти максимум или минимум функции

$$Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (35)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,\,m}, \qquad (36)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,\,n}, \qquad (37)$$

$x_j, \quad j = \overline{1, n}$ - целые числа (38)

Согласно методу Гомори задача линейного программирования сначала решается симплексным методом без учета целочисленности переменных. Если оптимальное решение оказывается целочисленным, то решение задачи заканчивается. Если оптимальное решение нецелочисленное, то из системы ограничений выбирается уравнение, для которого дробная часть координаты оптимального решения имеет наибольшее значение, и на его основе составляется дополнительное ограничение. Дополнительное ограничение отсекает от области допустимых решений нецелочисленное оптимальное решение, но при этом сохраняет целочисленные вершины этой области.

Пусть *i*–ое ограничение задачи, находящееся в последней симплексной таблице, имеет вид:

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} x_{ij} x_j = x_i^*, \qquad (39)$$

где x_i – базисная переменная в уравнении;

x_{ij} – коэффициенты при неизвестных (коэффициенты разложений векторов условий по базису опорного решения);

x_j – свободные переменные в системе уравнений;

x_i^* - правая часть уравнения (координата оптимального решения), которая является дробным числом.

Тогда дополнительное ограничение имеет вид:

$$q_i^* - \sum_{j=m+1}^{n} q_{ij} x_j \le 0, \qquad (40)$$

где q_i^* - дробная часть x_i^*;

q_{ij} – дробная часть x_{ij}.

Число $[x_i]$ называется *целой частью числа* x_i, если оно наиболее близкое к нему целое и не превосходит x_i.

Дробная часть q_i числа x_i находится как разность этого числа и его целой части:

$$q_i = x_i - [x_i]. \qquad (41)$$

Например, для числа $\frac{7}{4}$ целая часть $\left[\frac{7}{4}\right] = 1$, дробная часть равна $\frac{7}{4}$-1=$\frac{3}{4}$. Для числа -$\frac{9}{5}$ целая часть $\left[-\frac{9}{5}\right] = -2$, дробная часть равна -$\frac{9}{5}$ - (-2)= $\frac{1}{5}$. Дробная часть числа всегда неотрицательна и меньше единицы.

В неравенство (6. 6) вводится дополнительная переменная x_{n+1}, получается уравнение:

$$q_i^* - \sum_{j=m+1}^{n} q_{ij} x_j + x_{n+1} = 0. \qquad (42)$$

В систему ограничений задачи это ограничение записывается в виде:

$$-\sum_{j=m+1}^{n} q_{ij}x_j + x_{n+1} = q_i^*. \qquad (43)$$

После этого решение задачи продолжают двойственным симплексным методом или просто симплексным методом. Если получается целочисленное решение, то процесс решения заканчивается, в противном случае необходимо снова составить дополнительное ограничение.

Задача не имеет целочисленного решения, если оптимальное решение содержит координату с дробной частью и все коэффициенты соответствующего уравнения являются целыми.

Пример 16. Найти максимум целевой функции Z при заданной системе ограничений. Решить задачу аналитически и дать геометрическую иллюстрацию процесса решения.

$Z=x_1+2x_2$,

при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 7, \\ x_1 + 3x_2 \le 7, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$

x_1, x_2 – целые числа.

Решение: Вводя дополнительные неотрицательные переменные x_3 и x_4 со знаком «+» соответственно в каждое неравенство системы ограничений, получим каноническую форму задачи:

$Z=x_1+2x_2+0x_3+0x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 7, \\ x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 = 7, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ j = \overline{1,4},\ x_j - \textit{целые}.$

Среди векторов условий $\overline{A_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{A_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \overline{A_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{A_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ имеется два единичных вектора $\overline{A_3}$ *и* $\overline{A_4}$, то есть существует начальное опорное решение $\overline{X_1} = (0, 0, 7, 7)$ с базисом $Б_1 = \{\overline{A_3}, \overline{A_4}\}$. Составим симплексную таблицу (табл. 28)

Таблица 28

Б	c_k / $c_б$	$\overline{A_0}$	1	2 ↓	0	0	Θ_1	Θ_2
			$\overline{A_1}$	$\overline{A_2}$	$\overline{A_3}$	$\overline{A_4}$		
$\overline{A_3}$	0	7	3	1	1	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{7}{1}$
$\overline{A_4}$	0	7	1	$\boxed{3}$	0	1	$\frac{7}{1}$	$\frac{7}{3}$
Δ_k		0	-1	-2	0	0		

$$\Theta_{01} = \min\left\{\frac{7}{3}; \frac{7}{1}\right\} = \frac{7}{3} \quad при\ l = 1$$

$$\Theta_{02} = \min\left\{\frac{7}{1}; \frac{7}{3}\right\} = \frac{7}{3} \quad при\ l = 2$$

$\max\limits_k \Delta Z_k = \max\left\{-\frac{7}{3}\cdot(-1); -\frac{7}{3}\cdot(-2)\right\} = \frac{14}{3}$ *при* $k \in \{1, 2\}$. Следовательно, для улучшения опорного решения вектор $\overline{A_2}$ вводим в базис, тогда вектор $\overline{A_4}$ выйдет из базиса. Получим новое опорное решение $\overline{X_2} = (0, 7/3, 14/3, 0)$; $Z(\overline{X_2}) = 14/3$ при Б$_2$= $\{\overline{A_2}, \overline{A_3}\}$ (табл. 29)

Таблица 29

Б	c_k / $c_б$	$\overline{A_0}$	1 ↓ $\overline{A_1}$	2 $\overline{A_2}$	0 $\overline{A_3}$	0 $\overline{A_4}$	Θ_1
$\overline{A_3}$	0	$14/3$	$\boxed{8/3}$	0	1	$-1/3$	$\frac{14}{8}$ min
$\overline{A_2}$	1	$7/3$	$1/3$	1	0	$1/3$	$\frac{7}{1}$
Δ_k		$14/3$	$-1/3$	0	0	$2/3$	
$\overline{A_1}$	1	$7/4$	1	0	$3/8$	$-3/8$	
$\overline{A_2}$	2	$7/4$	0	1	$-1/8$	$3/8$	
Δ_k		$21/4$	0	0	$1/8$	$5/8$	

Полученное решение $\overline{X_2}$ не является оптимальным. Вводим в базис вектор $\overline{A_1}$. Получаем опорное решение $\overline{X_3} = (7/4, 7/4, 0, 0)$; $Z(\overline{X_3}) = 21/4$. Оно является оптимальным, так как оценки всех векторов условий положительные, но оно не удовлетворяет условиям целочисленности. Из последней симплексной таблицы для базисного вектора $\overline{A_1}$ имеем:

$$x_1 + \frac{3}{8}x_3 - \frac{1}{8}x_4 = \frac{7}{4}$$

Так как [1]=1; $\left[\frac{3}{8}\right] = 0; \left[-\frac{1}{8}\right] = -1; \left[\frac{7}{4}\right] = 1$, то по первой строке таблицы составляем правильное отсечение:

$$(1-1)x_1 + \left(\frac{3}{8} - 0\right)x_3 + \left(-\frac{1}{8} + 1\right)x_4 \geq \frac{7}{4} - 1$$

или

$$\frac{3}{8}x_3 + \frac{7}{8}x_4 \geq \frac{3}{4}.$$

Из таблицы для базисного вектора $\overline{A_2}$ имеем:

$$x_2 - \frac{1}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 = \frac{7}{4}$$

Так как [1]=1; $\left[-\frac{1}{8}\right] = -1; \left[\frac{3}{8}\right] = 0; \left[\frac{7}{4}\right] = 1$, то по второй строке таблицы составляем правильное отсечение:

$$(1-1)x_2 + \left(-\frac{1}{8}+1\right)x_3 + \left(\frac{3}{8}-0\right)x_4 \geq \frac{7}{4} - 1$$

или

$$\frac{7}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 \geq \frac{3}{4}.$$

Так как оба ограничения имеют одинаковые справа дробные числа, то в систему ограничений исходной задачи возьмем любое из них, например

$\frac{3}{8}x_3 + \frac{7}{8}x_4 \geq \frac{3}{4}$, следовательно, $3x_3+7x_4 \geq 6$.

Выразим это неравенство через переменные x_1 и x_2. Из системы ограничений имеем:

$$\begin{cases} x_3 = 7 - 3x_1 - x_2 \\ x_4 = 7 - x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

Получим: $3\cdot(7-3x_1-x_2)+7\cdot(7-x_1-3x_2) \geq 6$

$$29-9x_1-3x_2+49-7x_1-21x_2 \geq 6$$

или

$$2x_1+3x_2 \geq 8. \qquad \textbf{(*)}$$

Присоединяем дополнительное ограничение (*) к ограничениям нецелочисленного оптимального плана и получим следующую задачу линейного программирования в канонической форме (в форме основной задачи):

$Z=x_1+2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_5 = 8, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5},\ x_j - \textit{целое число.}$

Так как среди векторов $\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_5}$ имеется три единичных вектора $\overline{A_3}$, $\overline{A_4}$, $\overline{A_5}$, то для данной задачи можно непосредственно найти начальное опорное решение $\overline{X_1} = (0, 0, 7, 7, 8)$ при $Б_1=\{\overline{A_3}, \overline{A_4}, \overline{A_5}\}$ и $Z(\overline{X_1}) = 0$.

Решаем систему симплексным методом и находим оптимальный план (табл. 30):

Таблица 30

Б	c_k / $c_б$	$\overline{A_0}$	1↓ $\overline{A_1}$	2↓ $\overline{A_2}$	0 $\overline{A_3}$	0 $\overline{A_4}$	0 $\overline{A_5}$	Θ_1	Θ_2
$\overline{A_3}$	0	7	3	1	1	0	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{7}{1}$
$\overline{A_4}$	0	7	1	$\boxed{3}$	0	1	0	$\frac{7}{1}$	$\frac{7}{3}$ min
$\overline{A_5}$	0	8	2	3	0	0	1	$\frac{8}{2}=4$	$\frac{8}{3}$
Δ_k		0	-1	-2	0	0	0	Θ_1	
$\overline{A_3}$	0	$14/3$	$8/3$	0	1	$-1/3$	0	$14/8$	
$\overline{A_2}$	2	$7/3$	$1/3$	1	0	$1/3$	0	$7/1$	
$\overline{A_5}$	0	1	$\boxed{1}$	0	0	-1	1	1 min	
Δ_k		$14/3$	$-1/3$	0	0	$2/3$	0		
$\overline{A_3}$	0	2	0	0	1	2	$-8/3$		
$\overline{A_2}$	2	2	0	1	0	$2/3$	$-1/3$		
$\overline{A_1}$	1	1	1	0	0	-1	1		
Δ_k		5	0	0	0	$1/3$	$1/3$		

$$\max_k \Delta Z_k = \max\left\{\frac{7}{3}\cdot(-1); -\frac{7}{3}\cdot(-2)\right\} = \frac{14}{3}$$

при $\underline{k=2}$.

$\overline{X_2} = (0, 7/3, 14/3, 0, 1);\ Z(\overline{X_2}) = 14/3.$

Из последней симплексной таблицы следует, что $\overline{X_3} = \overline{X}^* = (1; 2; 2)$ является оптимальным решением построенной задачи, так как все оценки векторов условий неотрицательные. Так как при этом решении переменные x_1 и x_2 имеют целые значения, то оно также является оптимальным решением исходной целочисленной задачи:

$\overline{X}^* = (1; 2)$ *при* $Z_{\max}(\overline{X}) = 5.$

Дадим геометрическую интерпретацию решения задачи.

Запишем исходную задачу в стандартной форме:

$Z=x_1+2x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 7, \\ x_1 + 3x_2 \le 7, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1, 2;$

$x_j - целые\ числа.$

Область допустимых решений найдем используя систему ограничений:

L_1: $3x_1+x_2= 7$, следовательно $x_2=7-3x_1$

x_1	0	2
x_2	7	1

L_2: $x_1+3x_2= 7$, следовательно $x_2 = \frac{7 - x_1}{3}$

x_1	7	1
x_2	0	2

L_3: $x_1=0$

L_4: $x_2=0$

OABC – область допустимых решений (рис. 7). Максимальное значение целевая функция Z примет в точке $B\left(\frac{7}{4}; \frac{7}{4}\right)$, то есть $\overline{X}_{н.ц.} = \left(\frac{7}{4}; \frac{7}{4}; 0; 0\right)$ не является оптимальным планом целочисленной задачи. Поэтому вводится дополнительное ограничение: $2x_1+3x_2 \le 8$, которое представляет собой полуплоскость с граничной прямой:

L_5: $2x_1+3x_2 = 8$, следовательно $x_2 = \frac{8 - 2x_1}{3}$

x_1	1	4
x_2	2	0

Это дополнительное ограничение «отсекает» часть допустимой области с нецелочисленной вершиной B, не затрагивая целочисленных точек области.

Ответ: $\max Z\left(\overline{X}^*\right) = 5\ при\ \overline{X}^* = (1; 2)$.

ПРОВЕРОЧНАЯ РАБОТА 1

Вариант 1

1. Решите графическим методом:

$$L(x) = -5x_1 - x_2 \to min$$
$$2x_1 + x_2 \le 6,$$
$$x_1 - x_2 \le 2$$
$$-3x_1 + 2x_2 \le 3,$$
$$x_1 - x_2 \le 5,$$
$$x_{1,2} \ge 0.$$

2. Решите задачу из п.1 симплекс-методом
3. Решите задачу из п.1 с добавлением условия целочисленности переменных x_1, x_2

Вариант 2

1.Решите графическим методом:

2.$L(x) = 5x_1 - x_2 \to min$

$$-x_1 + x_2 \le 3,$$
$$4x_1 + 5x_2 \le 15$$
$$2x_1 - 5x_2 \le 3,$$
$$x_1 + x_2 \ge 5,$$
$$x_{1,2} \ge 0.$$

3.Решите задачу из п.1 симплекс-методом

4.Решите задачу из п.1 с добавлением условия целочисленности переменных x_1, x_2

Литература

1. Ржевский, С. В. Исследование операций : учебное пособие / С. В. Ржевский. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 480 с. https://e.lanbook.com/book/213248
2. Гончаров, В. А. Методы оптимизации : учебное пособие для вузов / В. А. Гончаров. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 191 с. — (Бакалавр и магистр. Академический курс). https://urait.ru/bcode/508129
3. Пантелеев, А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах : учебное пособие / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. — 4-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2015. — 512 с. https://e.lanbook.com/book/67460